

УДК 519.622.2

Численное исследование модели энергетической системы

Чадов С.Н., асп.

Рассматривается модель энергетической системы, состоящей из турбогенератора, центробежного регулятора и некоторой нагрузки. Данная система интегрируется несколькими методами при разных значениях шага интегрирования. Для каждого метода приведены данные о погрешности и затратах машинного времени.

Ключевые слова: моделирование энергетических систем, численные методы решения ОДУ.

Numerical study of a model power system

Chadov S.N., PhD student

This article describes a model power system consisting of a turbogenerator, a flyball regulator and some load. The model is integrated with several numerical solvers with different time step values. For each solver the data on accuracy and computational cost is given.

Keywords: power system models, ODE solvers.

Введение. При моделировании систем большого масштаба часто имеет смысл рассматривать не только абстрактные характеристики используемых методов интегрирования (например, порядок точности), но и проводить конкретные численные эксперименты, которые могут показать, насколько хорошо тот или иной метод работает на конкретной системе. Попытаемся проанализировать особенности интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся из упрощенной модели энергетической системы, обладающей некоторыми свойствами реальных энергетических систем. Для этой цели будем использовать несколько известных методов, также рассмотрим вопрос использования их комбинаций. Современные методы с автоматическим выбором шага интегрирования не рассматриваются, поскольку, на наш взгляд, автоматический выбор шага интегрирования усложняет исследование особенностей каждого метода.

Математическая модель. Рассмотрим турбогенератор, вращение которого происходит под действием крутящего момента паровой турбины Q , момента сопротивления, зависящего от квадрата угловой скорости вращения турбины, и момента, создаваемого нагрузкой. Запишем уравнение для угловой скорости вращения такой машины:

$$\frac{d\omega}{dt} = \gamma Q - \eta\omega|\omega| - \xi\omega I,$$

где ω – угловая скорость вращения турбины; I – сила тока, проходящего через нагрузку; η , ξ , γ – некоторые коэффициенты.

Скорость вращения ротора генератора находится под управлением центробежного регулятора, состояние которого описывается следующим уравнением:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \omega^2\rho - \alpha \frac{d\rho}{dt} - k^2(\rho - \rho_0),$$

где ρ – уровень регулирования (т. е. отклонение регулятора от оси вращения); k^2 – отношение жесткости пружины к центробежной массе; α – коэффициент, учитывающий действие вязких сил; ρ_0 – значение ρ в состоянии покоя.

Примем, что Q зависит от ρ следующим образом:

$$Q = Q_{\max} \frac{e^{-\vartheta}}{1 + e^{-\vartheta}},$$

где

$$\vartheta = \frac{\rho - \rho_{\min}}{\rho_{\max} - \rho_{\min}} \nu_1 - \nu_2.$$

Коэффициенты ν_1 , ν_2 выберем таким образом, чтобы обеспечить достаточно плавное изменение Q в зависимости от ρ на всей области определения (используем $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 2$).

Сила тока вычисляется из уравнения

$$(r + R)I = \beta\omega = \varepsilon,$$

где r – внутреннее сопротивление генератора; R – сопротивления нагрузки; ε – ЭДС генератора.

Значения констант подберем таким образом, чтобы установившиеся режимы работы и характерные времена переходных процессов имели тот же порядок величины, что и в реальных системах. Так, будем считать, что время разгона турбины из состояния покоя до заданной скорости имеет порядок нескольких минут, время остановки турбины под действием силы трения имеет порядок десятков минут, частота вращения турбины в установившемся режиме – около 30 Гц. Были получены следующие значе-

ния: $\gamma = 0,0156$; $\eta = 0,0000323$; $\xi = 0,0001$; $\alpha = 5$; $k^2 = 520$; $\beta = 12,0$; $\rho_{\min} = 3$; $\rho_{\max} = 10$.

Режим работы системы следующий: в момент времени $t = 0$ турбина не вращается; далее она начинает ускоряться и в некоторый момент времени t_1 подключается нагрузка.

Интегрирование системы. Рассмотрим интегрирование вышеописанной системы на промежутке в 10 мин. Для решения будем использовать следующие методы:

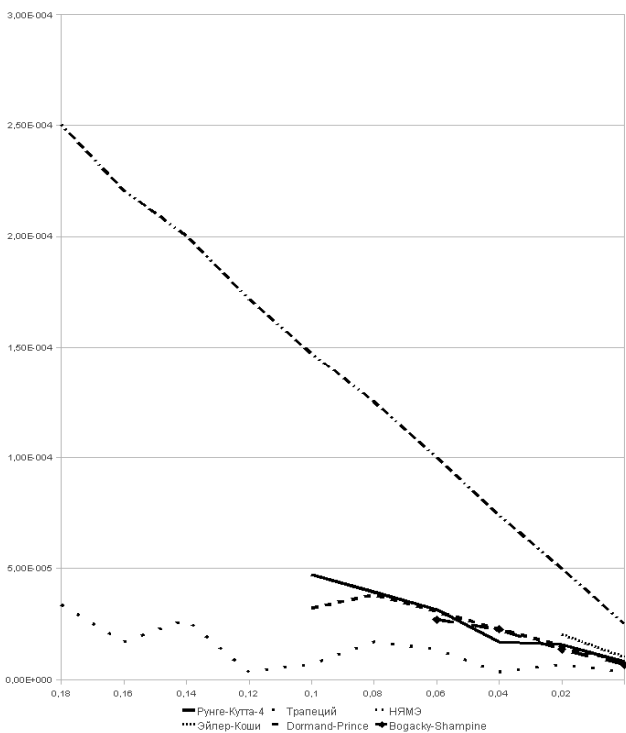
- 1) метод Рунге-Кутты 4-го порядка [1];
- 2) метод Bogacki-Shampine 3-го порядка [2];
- 3) метод Dormand-Prince 5-го порядка [3];
- 4) метод Эйлера-Коши [1];
- 5) неявный метод Эйлера [1];
- 6) метод Трапеций [1];
- 7) метод Адамса – Башфорта – Моултона [1].

В предложенном списке представлены методы трех разных групп: явные методы типа Рунге-Кутты 2, 3, 4, 5 порядков точности (методы 1–4); неявные методы (5 и 6) и метод типа предиктор-корректор (6). Для неявных методов решение получаемой системы алгебраических уравнений производилось методом Ньютона, использующим, в свою очередь, для решения линеаризованной системы метод LUP – разложения [5].

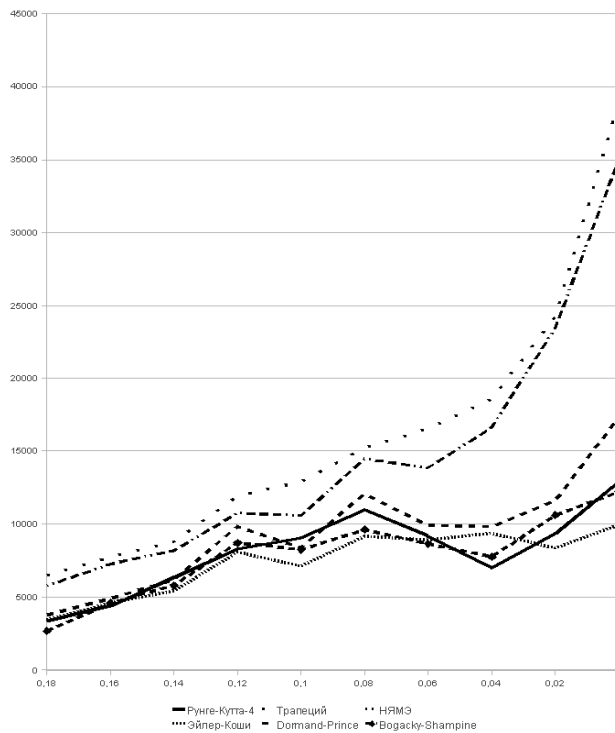
Будем интегрировать данную систему уравнений с различным шагом и рассмотрим зависимость точности вычислений и затрат машинного времени для каждого метода. Под точностью будем понимать *rooted-mean square* разности между полученным решением и приближением точного решения, полученным интегрированием системы с очень малым шагом. Заметим, что использование в практических целях интегрирования с таким размером шага, который мы принимаем за точное решение, малоэффективно, поскольку вычисления даже в рассматриваемых нами относительно простых условиях (одна турбина, интервал интегрирования 10 мин) занимают достаточно много времени. Анализ графиков (рис. 1, 2), полученных в результате экспериментов, показывает, что поведение методов при изменении шага существенно различается. Так, только неявными методами удалось успешно решить задачу при всех использованных значениях шага. При этом если

неявный метод Эйлера показывает практически линейную зависимость точности от размера шага, то для метода трапеций эта зависимость носит достаточно сложный характер, его точность в некоторых случаях ухудшается при уменьшении шага. С точки зрения времени выполнения зависимость обратная: неявные методы ожидаемо значительно уступают явным в быстродействии, причем это отставание возрастает с уменьшением шага достаточно быстро. Интересен тот факт, что метод Bogacki-Shampine, имеющий 3-й порядок точности, в большинстве случаев превосходит методы Рунге-Кутты-4 и Dormand-Prince, имеющие соответственно 4-й и 5-й порядок точности, при меньших затратах машинного времени.

Чтобы оценить эффективность каждого метода, которую определим как величину, обратную произведению погрешности на время, рассмотрим графики «эффективности» (рис. 3). Анализ графиков показывает, что зависимость эффективности метода от размера шага (h) носит достаточно сложный характер, в частности, для многих методов характерны «пульсации» на значениях, делящих интервал интегрирования нацело. В общем, можно сказать, что неявный метод Эйлера оказался неэффективен при любом h . При больших h более эффективным оказывается метод трапеций. При более мелком шаге однозначно лучший метод определить очень сложно. Так, например, метод трапеций показывает как достаточно высокую, так и достаточно низкую эффективность, тогда как методы Bogacki-Shampine и Эйлера-Коши показывают гораздо лучшие результаты в среднем. Поэтому для данной системы возможно использование одного из гибридных методов, предложенных в [4]. Детальное исследование эффективности гибридных методов для данной системы выходит за рамки нашего исследования, укажем только, что гибридный метод на основе методов трапеций и Bogacki-Shampine показал результаты, сравнимые с результатами методов группы Рунге-Кутты при малом шаге, но при этом, как и неявные методы, оказался применим при всех исследованных значениях величины шага.

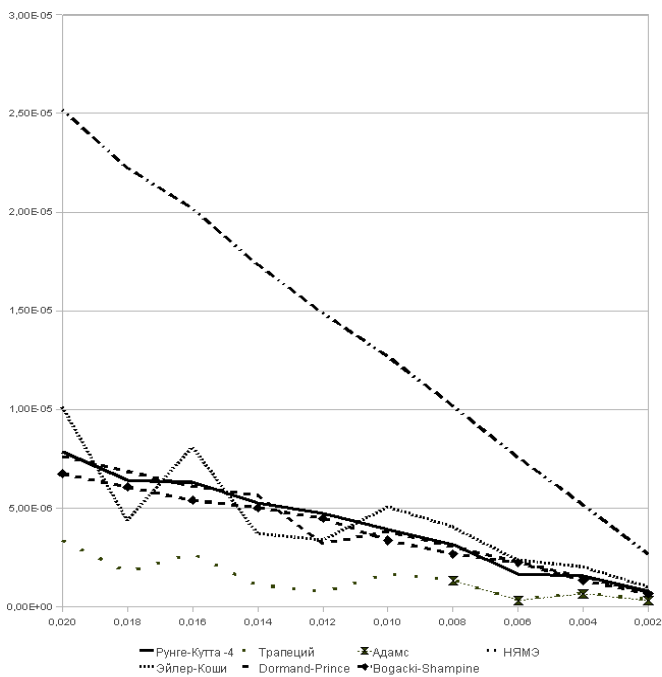


а)

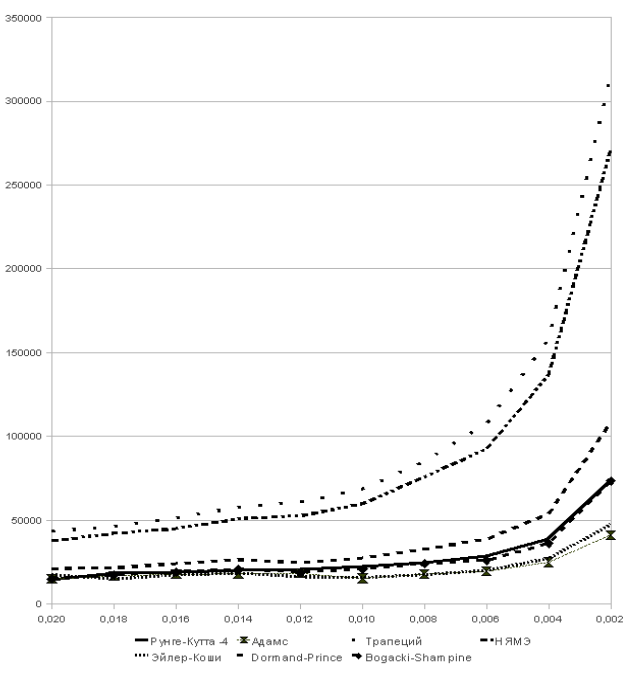


б)

Рис. 1. Графики зависимости погрешности (а) и времени вычислений (б) от величины шага интегрирования (крупный шаг)



а)



б)

Рис. 2. Графики зависимости погрешности (а) и времени вычислений (б) от величины шага интегрирования (мелкий шаг)

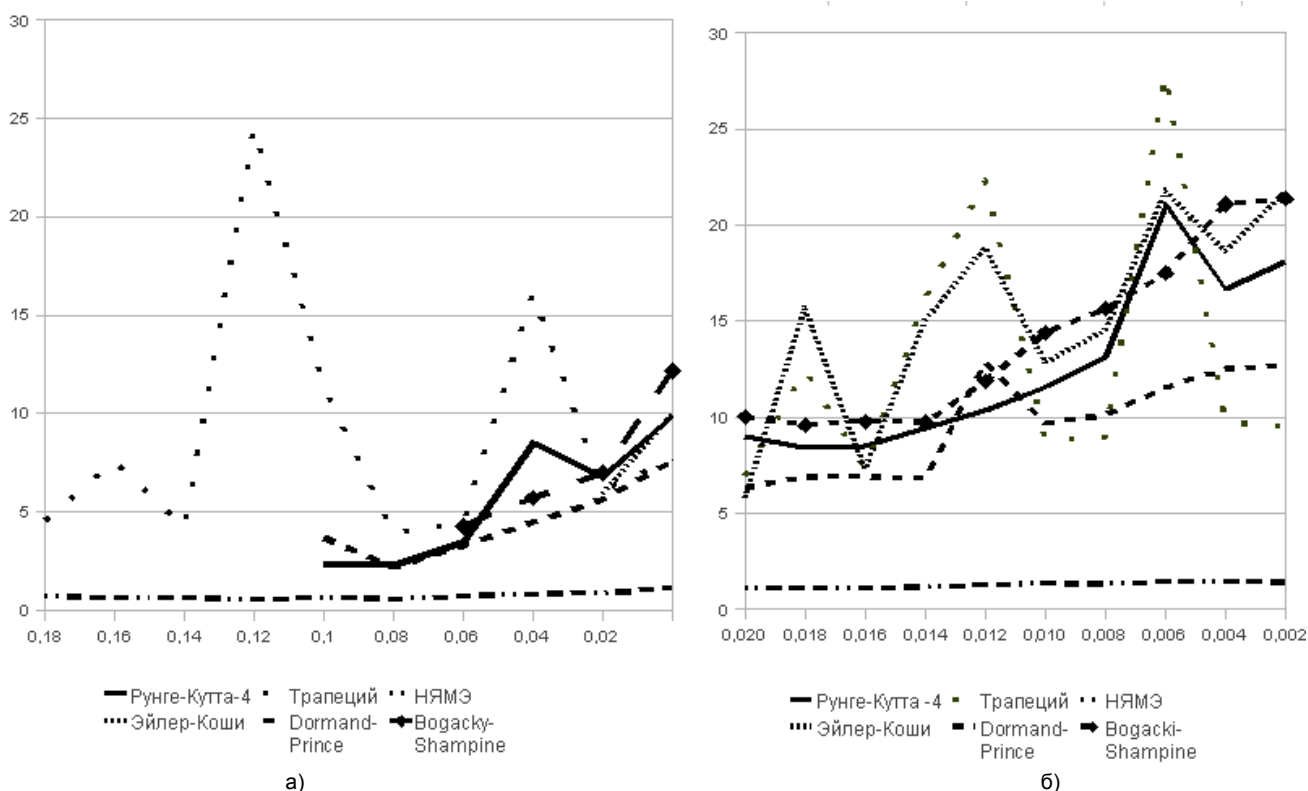


Рис. 3. Эффективность методов интегрирования: а – при $h = 0,18-0,02$; б – при $h = 0,02-0,002$

Заключение

Для моделирования рассмотренной системы выбор метода интегрирования является достаточно важной задачей, так как точность и затраченное машинное время могут отличаться в несколько раз. Более того, большинство методов для решения этой системы требуют выбора достаточно маленького шага интегрирования. Но и при малом шаге однозначно выбрать лучший метод сложно. Возможной альтернативой видятся гибридные методы, а также методы с автоматическим выбором шага.

Чадов Сергей Николаевич,
Ивановский государственный энергетический университет,
аспирант кафедры высокопроизводительных вычислительных систем,
e-mail: sergei.chadov@gmail.com

Список литературы

1. Амосов А.А., Дубянский Ю.А., Копченев Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1994.
2. Bogacki P., Shampine L.F. (1989), "A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas", Applied Mathematics Letters 2 (4): 321–325
3. Dormand J.R., Prince P.J. (1980), "A family of embedded Runge-Kutta formulae", Journal of Computational and Applied Mathematics 6 (1): 19–26
4. Чадов С.Н. Гибридный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с автоматическим выбором алгоритма интегрирования // Вестник ИГЭУ. – 2008. – № 4. – С. 82–84.
5. Cormen T... [et al.]. Introduction to algorithms / 2nd ed. p. см. (hc.: alk. paper, MIT Press).-1 (McGraw-Hill).